ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

УДК 519.21

В.В. Булдигін, М.К. Руновська

УМОВИ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ І СИНГУЛЯРНОСТІ РОЗПОДІЛІВ ГАУССІВСЬКИХ МАРКОВСЬКИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Вступ

Проблеми абсолютної неперервності і сингулярності ймовірнісних мір у нескінченновимірних лінійних просторах займають важливе місце в різних математичних дисциплінах. Відома теорема Гаєка–Фельдмана (див. наприклад, [1, 2]) стверджує, що в локально опуклому просторі дві гауссівські міри або абсолютно неперервні, або сингулярні, і дає загальні умови, коли це виконується. Але перевірка відповідних умов навіть у випадку гільбертового простору (див., зокрема, [3]) натикається на значні технічні труднощі. Підкреслимо, що в порівняно простому випадку, зв'язаному з перевіркою умов абсолютної неперервності для зсуву міри в гільбертовому просторі, необхідно перевіряти умову належності зсуву області значень квадратного кореня з коваріаційного оператора, що може бути технічно складною задачею. Тому для різних класів гауссівських мір встановлюються свої варіанти умов, за яких має місце абсолютна неперервність або сингулярність.

У даній статті розглядаються гауссівські марковські міри у просторах послідовностей, тобто розподіли гауссівських марковських послідовностей. Останні зображаються за допомогою рекурентних співвідношень першого порядку із змінними, взагалі кажучи, коефіцієнтами. Ці послідовності досліджувалися, наприклад, у праці [4], а статистичні задачі для них за певних обмежень на коефіцієнти розглядалися в працях [5, 6].

Постановка задачі

Метою статті є знаходження умов абсолютної неперервності і сингулярності для розподілів гауссівських марковських послідовностей. Зокрема, у статті знаходиться множина припустимих зсувів і формула щільності Радона–Никодима гауссівських марковських розподілів відносно зсуву в просторі всіх послідовностей і просторі l_2. При доведенні відповідних тверджень використовуються результати праці [7], де отримано загальні умови абсолютної неперервності і сингулярності ймовірнісних розподілів у "передбачуваних" термінах та, зокрема, гауссівських розподілів у просторі послідовностей. Саме перевірка цих умов у просторі всіх послідовностей дає можливість отримати наочні критерії для гауссівських марковських послідовностей.

Позначення і допоміжні результати

Нехай $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ – імовірнісний простір і $(\xi_n)=(\xi_n, n\ge 1)$ – *гауссівська послідовність*, тобто послідовність сумісно гауссівських випадкових величин, визначених на $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$. Якщо (ξ_n) додатково є марковською, то говорять, що (ξ_n) – *гауссівська марковська* послідовність. Розподіл гауссівської послідовності однозначно визначається трьома "параметрами", а саме: *послідовністю математичних сподівань* $m_n = E\xi_n$, $n\ge 1$; *послідовністю дисперсій* $\sigma_n^2 = E[\xi_n - E\xi_n]^2$, $n \ge 1$; *сім'єю коефіцієнтів кореляцій* $r_{i,j} = \dfrac{E\xi_i\xi_j}{\sigma_i\sigma_j}$, якщо $\sigma_i\sigma_j > 0$, і $r_{i,j}=0$, якщо $\sigma_i\sigma_j = 0$, $i, j \ge 1$. Проте, якщо гауссівська послідовність (ξ_n) є марковською, то вона додатково характеризується тим, що для будь-яких $1 \le i \le m$ коефіцієнти кореляцій зв'язані співвідношенням (див., наприклад, [8])

$$r_{i,m} = \prod_{k=i}^{m-1} r_{k,k+1}. \qquad (1)$$

Тому розподіл гауссівської марковської послідовності однозначно визначається послідовністю математичних сподівань (m_n), послідовністю дисперсій (σ_n^2) та послідовністю коефіцієнтів кореляцій $(r_n)=(r_n, n\ge 1)$, де $r_n = r_{n,n+1}$. Будемо позначати ці параметри записом (m_n, r_n, σ_n^2).

Нехай R^∞ – простір усіх дійснозначних послідовностей і l_2 – простір усіх послідовностей з R^∞, сумованих з квадратом, тобто гільбертів простір із скалярним добутком $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, де $x=(x_n)$, $y=(y_n)$. Далі, нехай $B(R^\infty)$ – σ-алгебра, породжена сім'єю циліндрричних множин з простору R^∞, та B_n – σ-алгебра борелівських множин з R^n. Розглянемо гауссівські послідовності (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$. Позначимо P і $\hat{P}$ розподіли послідовностей (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ на $(R^\infty, B(R^\infty))$, тобто для будь-якої множини $B \in B(R^\infty)$: $P(B) = \mathcal{P}\{(\xi_n) \in B\}$ і $\hat{P}(B) = \mathcal{P}\{(\hat{\xi}_n) \in B\}$. Нехай також $P_n = P|B_n$ і $\hat{P}_n = \hat{P}|B_n$ – звуження мір P і $\hat{P}$ на B_n.

Розглянемо умовні математичні сподівання $E[\xi_n|\xi_1,...,\xi_{n-1}]$ і $E[\hat{\xi}_n|\hat{\xi}_1,...,\hat{\xi}_{n-1}]$. Згідно з гауссовістю послідовностей (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ та теоремою про нормальну кореляцію [9] існують такі невипадкові лінійні функції $a_{n-1}(x_1,...,x_{n-1})$ і $\hat{a}_{n-1}(x_1,...,x_{n-1})$, що $E[\xi_n|\xi_1,...,\xi_{n-1}] = a_{n-1}(\xi_1,...,\xi_{n-1})$ і $E[\hat{\xi}_n \mid \hat{\xi}_1,...,\hat{\xi}_{n-1}] = \hat{a}_{n-1}(\hat{\xi}_1,...,\hat{\xi}_{n-1})$. Введемо позначення $\Delta_{n-1}(x_1,...,x_{n-1}) = \hat{a}_{n-1}(x_1,...,x_{n-1}) - a_{n-1}(x_1,...,x_{n-1})$ і $b_{n-1} = (E[\xi_n - a_{n-1}]^2)^{\frac{1}{2}}$, $\hat{b}_{n-1} = (E[\hat{\xi}_n - \hat{a}_{n-1}]^2)^{\frac{1}{2}}$, $n \ge 2$. Нагадаємо, що згідно з теоремою про нормальну кореляцію b_{n-1} і $\hat{b}_{n-1}$ є невипадковими величинами. Далі, вважаємо, що $b_n^2 > 0$, $\hat{b}_n^2 > 0$, $n \ge 1$.

Для гауссівських послідовностей у статті [7] знайдено необхідні і достатні умови абсолютної неперервності та сингулярності розподілів цих послідовностей, а саме, *якщо* (ξ_n) *і* $(\hat{\xi}_n)$ *– дві гауссівські послідовності у просторі* $(R^\infty, B(R^\infty))$, *усі скінченновимірні розподіли яких еквівалентні* ($\hat{P}_n \sim P_n$, $n \ge 1$), *то* $P \sim \hat{P}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[E\left(\frac{\Delta_n(\xi_1,...,\xi_{n-1})}{\hat{b}_n}\right)^2 + \left(\frac{b_n^2}{\hat{b}_n^2} - 1\right)^2\right] < \infty, \qquad (2)$$

у протилежному випадку – $P \perp \hat{P}$.

Перша задача даної статті полягає в знаходженні умов, за яких для гауссівських марковських послідовностей виконується умова (2), що приводить до критеріїв еквівалентності та сингулярності гауссівських марковських мір у просторі R^∞. Зокрема, це дає можливість описати множину припустимих зсувів гауссівських марковських розподілів у просторі R^∞.

Друга задача – отримати відповідні умови еквівалентності та сингулярності гауссівських марковських розподілів у просторі l_2, спираючись на одержані для простору R^∞ результати. Прикладом застосування одержаних результатів є знаходження формули щільності Радона–Никодима гауссівської марковської міри відносно зсуву як границі скінченновимірних щільностей Радона–Никодима відповідних гауссівських марковських мір.

Основні результати

Нехай (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ – гауссівські марковські послідовності з параметрами (m_n, r_n, σ_n^2) і $(\hat{m}_n, \hat{r}_n, \hat{\sigma}_n^2)$, відповідно. Відомо (див., наприклад, [4]), що гауссівська марковська послідовність (ξ_n) задається рекурентним співвідношенням

$$\xi_0 = 0,\ \xi_n = m_n + \alpha_n(\xi_{n-1} - m_{n-1}) + \beta_n\gamma_n,\ n \ge 1, \quad (3)$$

де $E\xi_n = m_n$, $n \ge 1$; (γ_n) – стандартна гауссівська послідовність, тобто послідовність незалежних гауссівських випадкових величин з нульовим середнім та одиничною дисперсією, а коефіцієнти α_n і β_n виражаються через "параметри" σ_n і r_n таким чином: $\alpha_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} r_{n-1}$, якщо $\sigma_n \ne 0$, $n \ge 2$, і $\alpha_n = 0$, якщо $\sigma_n = 0$, $n \ge 1$; $\beta_1^2 = \sigma_1^2$, $\beta_n^2 = \sigma_n^2(1 - r_{n-1}^2)$, $n \ge 2$.

Аналогічні співвідношення мають місце для послідовності $(\hat{\xi}_n)$:

$$\hat{\xi}_0 = 0,\ \hat{\xi}_n = \hat{m}_n + \hat{\alpha}_n\left(\hat{\xi}_{n-1} - \hat{m}_{n-1}\right) + \hat{\beta}_n\hat{\gamma}_n,\ n \ge 1, \quad (4)$$

де $E\hat{\xi}_n = \hat{m}_n$, $n \ge 1$; $(\hat{\gamma}_n)$ – стандартна гауссівська послідовність з коефіцієнтами $\hat{\alpha}_n =$

$= \dfrac{\hat{\sigma}_n}{\hat{\sigma}_{n-1}} \hat{r}_{n-1}$, якщо $\hat{\sigma}_n \neq 0$, $n \geq 2$, і $\hat{\alpha}_n = 0$, якщо

$\hat{\sigma}_n = 0$, $n \geq 1$; $\hat{\beta}_1^2 = \hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\beta}_n^2 = \hat{\sigma}_n^2(1 - \hat{r}_{n-1}^2)$, $n \geq 2$.

Справедлива теорема про абсолютну неперервність і сингулярність розподілів гауссівських марковських послідовностей у просторі R^∞ у термінах коефіцієнтів із зображень (3), (4).

Теорема 1. Нехай (ξ_n) та $(\hat{\xi}_n)$ — гауссівські марковські послідовності, задані співвідношеннями (3) і (4), відповідно, для яких $\beta_n^2 > 0$, $\hat{\beta}_n^2 > 0$, $n \geq 1$. Якщо P і $\hat{P}$ — розподіли послідовностей (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ у просторі $(R^\infty$, $B(R^\infty))$, то $\hat{P} \sim P$ тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sigma_{n-1}^2\left(\frac{\hat{\alpha}_n - \alpha_n}{\hat{\beta}_n}\right)^2 + \left(\frac{\beta_n^2}{\hat{\beta}_n^2} - 1\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\left((\hat{m}_n - m_n) - \hat{\alpha}_n(\hat{m}_{n-1} - m_{n-1})\right)^2}{\hat{\beta}_n^2}\right] < \infty, \qquad (5)$$

де $\sigma_k^2 = \beta_k^2 + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\beta_i^2 \prod_{j=i+1}^{k-1} \alpha_j^2\right)$, $k \geq 1$. Відповідно, $\hat{P} \perp P$ тоді і тільки тоді, коли ряд у (5) розбігається.

***Приклад* 1.** Розглянемо центровані гауссівські марковські послідовності (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$, задані рекурентними співвідношеннями $\xi_0 = 0$, $\xi_n = \alpha\xi_{n-1} + \gamma_n$, $n \geq 1$, і $\hat{\xi}_0 = 0$, $\hat{\xi}_n = \hat{\alpha}\,\hat{\xi}_{n-1} + \hat{\gamma}_n$, $n \geq 1$, де (γ_n) і $(\hat{\gamma}_n)$ — стандартні гауссівські послідовності; $\alpha, \hat{\alpha}$ — деякі сталі. Оскільки $\beta_n = \hat{\beta}_n = 1$ і $m_n = \hat{m}_n = 0$, $n \geq 1$, то ряд в умові (5) набуде вигляду $(\hat{\alpha} - \alpha)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_{n-1}^2$. Звідси випливає, що при $\hat{\alpha} \neq \alpha$ умова (5) не виконується, оскільки $\sigma_{n-1}^2 \geq 1$, $n \geq 2$, і тому ряд в умові (5) розбіжний. Таким чином, розподіли послідовностей (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ є сингулярними при $\hat{\alpha} \neq \alpha$.

***Приклад* 2.** Розглянемо гауссівські марковські послідовності (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$, задані рекурентними співвідношеннями $\xi_0 = 0$, $\xi_n = \alpha\xi_{n-1} + \gamma_n$, $n \geq 1$, і $\hat{\xi}_0 = 0$, $\hat{\xi}_n = \hat{\alpha}_n \hat{\xi}_{n-1} + \hat{\gamma}_n$, $n \geq 1$, де (γ_n) і $(\hat{\gamma}_n)$ — стандартні гауссівські послідовності; $\hat{\alpha}_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha$; α — деяка стала. Аналогічно попередньому випадку $\beta_n = \hat{\beta}_n = 1$ і $m_n = \hat{m}_n = 0$, $n \geq 1$. Тоді ряд в умові (5) набуває вигляду $\sum_{n=2}^{\infty}(\hat{\alpha}_n - \alpha)^2\sigma_{n-1}^2$. Звідси випливає, що збіжність ряду, а отже, і еквівалентність розподілів введених послідовностей, залежить від швидкості збіжності послідовності $(\hat{\alpha}_n)$.

Зауважимо, що моделі, розглянуті в прикладах 1, 2, вивчалися в [5, 6].

З теореми 1 випливає такий критерій еквівалентності та сингулярності гауссівських марковських послідовностей у термінах їх кореляційних характеристик.

Теорема 2. Нехай (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ — гауссівські марковські послідовності з параметрами $(m_n$, $r_n, \sigma_n^2)$ і $(\hat{m}_n, \hat{r}_n, \hat{\sigma}_n^2)$, причому $\sigma_n^2(1 - r_{n-1}^2) > 0$, $\hat{\sigma}_n^2(1 - \hat{r}_{n-1}^2) > 0$, $n \geq 2$. Якщо P і $\hat{P}$ — розподіли послідовностей (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ у просторі $(R^\infty$, $B(R^\infty))$, то $\hat{P} \sim P$ тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{1 - \hat{r}_{n-1}^2}\left(\frac{\hat{r}_{n-1}\sigma_{n-1}}{\hat{\sigma}_{n-1}} - \frac{r_{n-1}\sigma_n}{\hat{\sigma}_n}\right)^2 + \right.$$
$$+ \left(\frac{\sigma_n^2}{\hat{\sigma}_n^2}\frac{1 - r_{n-1}^2}{1 - \hat{r}_{n-1}^2} - 1\right)^2 +$$

$$+\frac{\left(\left(\hat{m}_n-m_n\right)-\frac{\hat{\sigma}_n}{\hat{\sigma}_{n-1}}\hat{r}_{n-1}\left(\hat{m}_{n-1}-m_{n-1}\right)\right)^2}{\hat{\sigma}_n^2(1-\hat{r}_{n-1}^2)}\Bigg]<\infty. \quad (6)$$

Відповідно, $\hat{P}\perp P$ тоді і тільки тоді, коли ряд у (6) розбіжний.

З теореми 2 безпосередньо випливають деякі наслідки.

***Наслідок* 1.** Якщо $m_n=\hat{m}_n=0$, $\frac{\sigma_n}{\hat{\sigma}_n}\to 1$, $n\to\infty$ і $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|r_n|<1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\hat{r}_n|<1$, то $\hat{P}\sim P$ $(\hat{P}\perp P)$ у просторі $(R^\infty, B(R^\infty))$ тоді і тільки тоді, коли збігається (розбігається) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(r_n-\hat{r}_n)^2.$$

***Наслідок* 2.** Якщо $m_n=\hat{m}_n=0$, $r_n\to 0$, $\hat{r}_n\to 0$, $n\to\infty$, то $\hat{P}\sim P$ $(\hat{P}\perp P)$ у просторі $(R^\infty, B(R^\infty))$ тоді і тільки тоді, коли збігається (розбігається) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma_n^2}{\hat{\sigma}_n^2}-1\right)^2.$$

Розглянемо задачу про множину припустимих зсувів гауссівської марковської послідовності у просторі R^∞. Нагадаємо, що припустимим зсувом центрованої гауссівської міри P, яка є розподілом гауссівської послідовності (ξ_n), є така послідовність (s_n), що розподіл послідовності $(\hat{\xi}_n)$, $\hat{\xi}_n=\xi_n+s_n$, $n\ge 1$, еквівалентний розподілу послідовності (ξ_n).

Теорема 3. Нехай (ξ_n) – центрована гауссівська марковська послідовність, задана співвідношенням $\xi_0=0$, $\xi_n=\alpha_n\xi_{n-1}+\beta_n\gamma_n$, $n\ge 1$, де (γ_n) – стандартна гауссівська послідовність, (α_n), (β_n) – послідовності з (3), причому $\beta_n^2>0$, $n\ge 1$. Нехай послідовність $(\hat{\xi}_n)$ така, що $\hat{\xi}_n=\xi_n+s_n$, $n\ge 1$. Якщо P і $\hat{P}$ – розподіли послідовностей (ξ_n) та $(\hat{\xi}_n)$ у просторі $(R^\infty, B(R^\infty))$, відповідно, то $\hat{P}\sim P$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s_n-\alpha_n s_{n-1})^2}{\beta_n^2}<\infty. \quad (7)$$

Зауважимо, що для послідовностей (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$, заданих параметрами $(0,r_n,\sigma_n^2)$ і (s_n,r_n,σ_n^2), $\sigma_n^2(1-r_{n-1}^2)>0$, $n\ge 2$, умова (7) набуває вигляду

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(s_n-r_{n-1}s_{n-1})^2}{\sigma_n^2(1-r_{n-1}^2)}<\infty. \quad (8)$$

***Приклад* 3.** Розглянемо гауссівську марковську послідовність (ξ_n), задану співвідношенням $\xi_0=0$, $\xi_n=\alpha_n\xi_{n-1}+\beta_n\gamma_n$, $n\ge 1$, де (γ_n) – стандартна гауссівська послідовність, (α_n), (β_n) – послідовності з (3), причому $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\beta_n^2>0$ і $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\beta_n^2<\infty$. Якщо $\sup|\alpha_n|<\infty$, $n\ge 1$, умова $\sum\limits_{n=1}^{\infty}s_n^2<\infty$ є достатньою для виконання умови (7), а отже, є достатньою умовою припустимого зсуву розподілу послідовності (ξ_n).

Лема 1. Нехай $(\xi_k^{(m)})$ і $(\hat{\xi}_k^{(m)})$ – скінченновимірні гауссівські марковські послідовності у просторі R^m з параметрами $(0,r_k,\sigma_k^2)$ і (s_k,r_k,σ_k^2), причому $\sigma_k^2(1-r_{k-1}^2)>0$, $2\le k\le m$. Тоді щільність Радона–Никодима зсунутої гауссівської марковської міри $\hat{P}_m$ відносно центрованої гауссівської марковської міри P_m задається формулою

$$\frac{d\hat{P}_m}{dP_m}(x^{(m)})=\exp\Bigg\{\sum_{k=1}^{m}\Bigg[-\frac{r_{k-1}s_{k-1}}{\sigma_{k-1}\sigma_k(1-r_{k-1}^2)}+$$

$$+\frac{(1-r_{k-1}^2r_k^2)s_k}{\sigma_k^2(1-r_{k-1}^2)(1-r_k^2)}-\frac{r_ks_{k+1}}{\sigma_k\sigma_{k+1}(1-r_k^2)}\Bigg]x_k+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{r_k s_k s_{k+1}}{\sigma_k\sigma_{k+1}(1-r_k^2)}-\frac{1}{2}\frac{(1-r_{k-1}^2r_k^2)s_k^2}{\sigma_k^2(1-r_{k-1}^2)(1-r_k^2)}\right]\Bigg\},$$

$$\mathrm{mod}\,P((x^{(m)})\in R^m).$$

Теорема 4. Нехай (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ – гауссівські марковські послідовності у просторі R^∞ з параметрами $(0,r_n,\sigma_n^2)$ і (s_n,r_n,σ_n^2), причому $\sigma_n^2(1-r_{n-1}^2)>0$, $n\ge 2$. Якщо виконується умова (8), то існує щільність Радона–Никодима зсунутої гауссівської марковської міри $\hat{P}$ відносно центрованої гауссівської марковської міри P, яка задається формулою

$$\frac{d\hat{P}}{dP}((x_m))=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{r_{k-1}s_{k-1}}{\sigma_{k-1}\sigma_k(1-r_{k-1}^2)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(1-r_{k-1}^2r_k^2)s_k}{\sigma_k^2(1-r_{k-1}^2)(1-r_k^2)}-\frac{r_k s_{k+1}}{\sigma_k\sigma_{k+1}(1-r_k^2)}\right]x_k+$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{r_k s_k s_{k+1}}{\sigma_k\sigma_{k+1}(1-r_k^2)}-\frac{1}{2}\frac{(1-r_{k-1}^2r_k^2)s_k^2}{\sigma_k^2(1-r_{k-1}^2)(1-r_k^2)}\right]\right\},$$

$$\mathrm{mod}\,P((x_m)\in R^\infty).$$

Приклад **4.** Розглянемо гауссівську марковську послідовність (ξ_n), задану співвідношенням $\xi_1=\gamma_1$, $\xi_n=\alpha\xi_{n-1}+\gamma_n$, $n\ge 2$, де (γ_n) – стандартна гауссівська послідовність; α – деяка стала. Поряд з цією послідовністю розглянемо зсунуту послідовність $(\hat{\xi}_n)$, таку, що $\hat{\xi}_n=$ $=\xi_n+\hat{s}_n$, $n\ge 1$, де $\hat{s}_k=\frac{s}{k}$, $k\ge 1$; s – невідомий параметр. Поставимо задачу оцінки параметра s. Необхідною і достатньою умовою припустимого зсуву є збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\hat{s}_k^2$, який у цьому випадку набуває вигляду $s^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Оскільки цей ряд збігається, то розподіли P і $\hat{P}$ послідовностей (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ є еквівалентними. Тому існує щільність Радона–Никодима відносно зсуву $\frac{d\hat{P}}{dP}$, яка має вигляд

$$\frac{d\hat{P}}{dP}((x_n))=\exp\left\{s\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1+\alpha^2)}{k}-\frac{2k\alpha}{k^2-1}\right]x_k-\right.$$

$$\left.-s^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1+\alpha^2)}{2k^2}-\frac{\alpha}{k(k+1)}\right]\right\},\mathrm{mod}\,P((x_n)\in R^\infty).$$

Розглядатимемо цю функцію як функцію від параметра s. Вона має вигляд $\frac{d\hat{P}}{dP}(u)=\exp\varphi(u)$, де $\varphi(u)=-Au^2+Bu$, $A=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1+\alpha^2)}{2k^2}-\frac{\alpha}{k(k+1)}\right]$, $B=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1+\alpha^2)}{k}-\frac{2k\alpha}{k^2-1}\right]x_k$. Оскільки $A>0$, то функція $\varphi(u)$ набуває максимуму при $u=\frac{B}{2A}$. Тому оцінку

$$\hat{s}=\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1+\alpha^2)}{k}-\frac{2k\alpha}{k^2-1}\right]\hat{\xi}_k}{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1+\alpha^2)}{k^2}-\frac{2\alpha}{k(k+1)}\right]}$$

можна вважати оцінкою максимальної правдоподібності параметра s у просторі R^∞.

Розглянемо гауссівські марковські послідовності (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ з параметрами (m_n,r_n,σ_n^2) і $(\hat{m}_n,\hat{r}_n,\hat{\sigma}_n^2)$ відповідно такі, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}m_n^2<\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}\hat{m}_n^2<\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2<\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}\hat{\sigma}_n^2<\infty. \quad (9)$$

За умовою (9) маємо, що $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^2<\infty$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\xi}_n^2<\infty$, $\mathrm{mod}\,\hat{P}$, тобто $P(l_2)=1$ і $\hat{P}(l_2)=1$. Тому поряд з мірами P і $\hat{P}$, які є розподілами послідовностей (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ у $(R^\infty,B(R^\infty))$, розглянемо міри P_1 і $\hat{P}_1$, які є розподілами цих послідовностей у просторі $(l_2,B(l_2))$, де $B(l_2)$ – σ-алгебра борелівських множин у l_2. При цьому, оскільки $B(l_2)\subset B(R^\infty)$, то для будь-якої множини $A \in B(l_2)$: $P(A) = P(A \cap l_2) = P_1(A)$. Аналогічні співвідношення мають місце і для міри $\hat{P}$. Тому $P_1 \sim \hat{P}_1$ в просторі $(l_2, B(l_2))$ тоді і тільки тоді, коли $P \sim \hat{P}$ в просторі $(R^\infty, B(R^\infty))$. Звідси випливає, що якщо до теорем 1, 2, 3 та їх наслідків додати умову (9), то відповідні твердження будуть задавати умови еквівалентності та сингулярності розподілів P_1 і $\hat{P}_1$ у просторі l_2.

Зокрема, маємо теорему про множину припустимих зсувів розподілу гауссівської марковської міри в гільбертовому просторі l_2.

Теорема 5. Нехай (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ – гауссівські марковські послідовності мають параметри $(0, r_n, \sigma_n^2)$ і (s_n, r_n, σ_n^2) і розподіли P_1 і $\hat{P}_1$ у просторі l_2, відповідно. Якщо $\sigma_n^2(1 - r_{n-1}^2) > 0$, $n \geq 2$, і виконується умова (10), то $\hat{P}_1 \sim P_1$ у просторі $(l_2, B(l_2))$ тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(s_n - r_{n-1}s_{n-1})^2}{\sigma_n^2(1 - r_{n-1}^2)} < \infty. \tag{10}$$

***Приклад* 5.** Якщо (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ – гауссівські марковські послідовності, введені в теоремі 5, причому $\overline{\lim_{n\to\infty}} |r_n| < 1$, то умова (10) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{s_n^2}{\sigma_n^2} < \infty.$$

Теорема 6. Нехай виконуються умови (9) і (10). Тоді існує щільність Радона–Никодима зсунутої гауссівської марковської міри $\hat{P}_1$ відносно центрованої гауссівської марковської міри P_1, яка задається формулою

$$\frac{d\hat{P}_1}{dP_1}((x_m)) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{r_{k-1}s_{k-1}}{\sigma_{k-1}\sigma_k(1 - r_{k-1}^2)} + \frac{(1 - r_{k-1}^2 r_k^2)s_k}{\sigma_k^2(1 - r_{k-1}^2)(1 - r_k^2)} - \frac{r_k s_{k+1}}{\sigma_k\sigma_{k+1}(1 - r_k^2)}\right]x_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{r_k s_k s_{k+1}}{\sigma_k\sigma_{k+1}(1 - r_k^2)} - \frac{1}{2}\frac{(1 - r_{k-1}^2 r_k^2)s_k^2}{\sigma_k^2(1 - r_{k-1}^2)(1 - r_k^2)}\right]\right\},$$

$$\mod P_1((x_m) \in l_2).$$

Підкреслимо, що теореми 5 і 6 є наслідками результатів, отриманих для простору R^∞. При цьому при доведенні теорем 5 і 6 не використовуються класичні результати про множину припустимих зсувів та про щільність відносно зсуву гауссівської міри в гільбертовому просторі [2].

Доведення основних результатів

Доведення теореми 1. Оскільки розподіли P_n і $\hat{P}_n$, $n \geq 1$, є гауссівськими, і $\beta_n^2 > 0$, $\hat{\beta}_n^2 > 0$, $n \geq 1$, то ці розподіли мають щільності в просторі R^n. Тому $\hat{P}_n \sim P_n$, $n \geq 1$. Тоді для того щоб скористатися результатами праці [7], необхідно перевірити виконання умови (2). Проведемо допоміжні міркування. Використовуючи співвідношення (3), знаходимо

$$a_{n-1}(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) = E[\xi_n | \xi_1, ..., \xi_{n-1}] =$$

$$= E[\alpha_n(\xi_{n-1} - m_{n-1}) + \beta_n\gamma_n + m_n | \xi_1, ..., \xi_{n-1}] =$$

$$= E[\alpha_n(\xi_{n-1} - m_{n-1}) | \xi_{n-1}] + m_n =$$

$$= \alpha_n(\xi_{n-1} - m_{n-1}) + m_n, \; n \geq 2.$$

Аналогічно маємо

$$\hat{a}_{n-1}\left(\hat{\xi}_n, ..., \hat{\xi}_{n-1}\right) = E\left[\hat{\xi}_n \,|\, \hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_{n-1}\right] =$$

$$= \hat{\alpha}_n\left(\hat{\xi}_{n-1} - \hat{m}_{n-1}\right) + \hat{m}_n, \; n \geq 2.$$

Отже, отримуємо

$$\Delta_{n-1} = (x_1, ..., x_{n-1}) = \hat{a}_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) -$$

$$- a_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) = (\hat{\alpha}_n - \alpha_n)x_{n-1} + (\hat{m}_n - m_n) +$$

$$+ (\alpha_n m_{n-1} - \hat{\alpha}_n \hat{m}_{n-1}), \; n \geq 2.$$

Звідси випливає

$$E(\Delta_{n-1}(\xi_1,\dots,\xi_{n-1}))^2=(\hat{\alpha}_n-\alpha_n)^2\sigma_{n-1}^2+$$

$$+((\hat{m}_n-m_n)-\hat{\alpha}_n(\hat{m}_{n-1}-m_{n-1}))^2,\ n\ge 2.$$

Крім того, маємо

$$b_{n-1}^2=E[\xi_n-a_{n-1}(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})]^2=\beta_n^2$$

і

$$\hat{b}_{n-1}^2=E[\hat{\xi}_n-\hat{a}_{n-1}(\hat{\xi}_1,\dots,\hat{\xi}_{n-1})]^2=\hat{\beta}_n^2,\ n\ge 2.$$

Тоді отримаємо

$$E\left(\frac{\Delta_{n-1}(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})}{\hat{b}_{n-1}}\right)^2+\left(\frac{b_{n-1}^2}{\hat{b}_{n-1}^2}-1\right)^2=$$

$$=\frac{(\hat{\alpha}_n-\alpha_n)^2\sigma_{n-1}^2}{\hat{\beta}_n^2}+\frac{((\hat{m}_n-m_n)-\hat{\alpha}_n(\hat{m}_{n-1}-m_{n-1}))^2}{\hat{\beta}_n^2}+$$

$$+\left(\frac{\beta_{n-1}^2}{\hat{\beta}_{n-1}^2}-1\right)^2,\ n\ge 2.$$

Таким чином, умова (2) виконується тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sigma_{n-1}^2\left(\frac{\hat{\alpha}_n-\alpha_n}{\hat{\beta}_n}\right)^2+\left(\frac{\beta_n^2}{\hat{\beta}_n^2}-1\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{((\hat{m}_n-m_n)-\hat{\alpha}_n(\hat{m}_{n-1}-m_{n-1}))^2}{\hat{\beta}_n^2}\right],$$

де $\sigma_k^2=\beta_k^2+\sum_{l=1}^{k-1}\left(\beta_l^2\prod_{j=l+1}^{k-1}\alpha_j^2\right)$, $k\ge 2$. Теорема 1 доведена.

Доведення теореми 2. Результат теореми 2 безпосередньо випливає з теореми 1, якщо скористатися співвідношеннями (3), (4), які виражають коефіцієнти α_n, β_n і $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$ через кореляційні характеристики σ_n, r_n, $\hat{\sigma}_n$, $\hat{r}_n$. Теорема 2 доведена.

Доведення теореми 3. Послідовності (ξ_n) і $(\hat{\xi}_n)$ задовольняють умови теореми 1, причому $\beta_n=\hat{\beta}_n=1$, $m_n=0$. Крім того, $s_n=E\hat{\xi}_n=\hat{m}_n$. Застосовуючи теорему 1, маємо, що $\hat{P}\sim P$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s_n-\alpha_n s_{n-1})^2}{\beta_n^2}<\infty$. Теорема 3 доведена.

Доведення теореми 4. Доведення аналогічне доведенню теореми 3.

Для обчислення скінченновимірної щільності Радона–Никодима, наведеної в лемі 1, необхідно знайти матрицю, обернену до коваріаційної матриці скінченної гауссівської марковської послідовності.

Лема 2. Обернена до коваріаційної матриця скінченної центрованої гауссівської марковської послідовності є тридіагональною матрицею $D_n^{-1}=(d_{ij})_{i,j=1}^n$ з елементами на діагоналях

$$d_{11}=\frac{1}{\sigma_1^2(1-r_1^2)},$$

$$d_{kk}=\frac{1-r_{k-1}^2r_k^2}{\sigma_k^2(1-r_{k-1}^2)(1-r_k^2)},\ k=2,\dots,n-1,$$

$$d_{nn}=\frac{1}{\sigma_n^2(1-r_{n-1}^2)},$$

$$d_{k+1,k}=d_{k,k+1}=\frac{-r_k}{\sigma_k\sigma_{k+1}(1-r_k^2)},\ k=1,\dots,n-1.$$

Доведення леми 2 має суто технічний характер і спирається на властивість (1).

Доведення леми 1. Скінченновимірні щільності $\frac{d\hat{P}_n}{dP_n}(x^{(n)})$ Радона–Никодима гауссівських марковських мір відносно зсуву мають вигляд

$$\frac{d\hat{P}_n}{dP_n}(x^{(n)})=\exp\left\{\langle D_n^{-1}s^{(n)},x^{(n)}\rangle-\frac{1}{2}\langle D_n^{-1}s^{(n)},s^{(n)}\rangle\right\},$$

де $x^{(n)}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $s^{(n)}=(s_1,s_2,\dots,s_n)$, а $D_n^{-1}=(d_{ij})_{i,j=1}^n$ – матриця, обернена до коваріаційної матриці скінченної гауссівської марковської послідовності (див. D_n^{-1} у лемі 2). Тому

$$\langle D_n^{-1}s^{(n)}, x^{(n)}\rangle = \sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{r_{k-1}s_{k-1}}{\sigma_{k-1}\sigma_k(1-r_{k-1}^2)} + \frac{(1-r_{k-1}^2r_k^2)s_k}{\sigma_k^2(1-r_{k-1}^2)(1-r_k^2)} - \frac{r_k s_{k+1}}{\sigma_k\sigma_{k+1}(1-r_k^2)}\right]x_k,$$

$$\langle D_n^{-1}s^{(n)}, s^{(n)}\rangle = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(1-r_{k-1}^2r_k^2)s_k^2}{\sigma_k^2(1-r_{k-1}^2)(1-r_k^2)} - 2\frac{r_k s_k s_{k+1}}{\sigma_k\sigma_{k+1}(1-r_k^2)}\right].$$

Провівши допоміжні обчислення, знаходимо

$$\frac{d\hat{P}_n}{dP_n}(x^{(n)}) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{r_{k-1}s_{k-1}}{\sigma_{k-1}\sigma_k(1-r_{k-1}^2)} + \frac{(1-r_{k-1}^2r_k^2)s_k}{\sigma_k^2(1-r_{k-1}^2)(1-r_k^2)} - \frac{r_k s_{k+1}}{\sigma_k\sigma_{k+1}(1-r_k^2)}\right]x_k + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{r_k s_k s_{k+1}}{\sigma_k\sigma_{k+1}(1-r_k^2)} - \frac{1}{2}\frac{(1-r_{k-1}^2r_k^2)s_k^2}{\sigma_k^2(1-r_{k-1}^2)(1-r_k^2)}\right]\right\}.$$

Лема 1 доведена.

Доведення теореми 5. Оскільки виконується умова (8), то $P \sim \hat{P}$ у просторі $(R^\infty, B(R^\infty))$. Звідси випливає, що існує щільність Радона–Никодима гауссівської марковської міри $\hat{P}$ відносно центрованої гауссівської марковської міри P. Тому щільність Радона–Никодима гауссівської марковської міри відносно зсуву $\frac{d\hat{P}}{dP}((x))$ можна шукати як границю скінченновимірних щільностей Радона–Никодима гауссівських марковських мір $\frac{d\hat{P}_n}{dP_n}(x^{(n)})$, які отримано в лемі 1. Тому маємо

$$\frac{d\hat{P}}{dP}((x_n)) = \lim_{n\to\infty}\frac{d\hat{P}_n}{dP_n}(x^{(n)}) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{r_{k-1}s_{k-1}}{\sigma_{k-1}\sigma_k(1-r_{k-1}^2)} + \frac{(1-r_{k-1}^2r_k^2)s_k}{\sigma_k^2(1-r_{k-1}^2)(1-r_k^2)} - \frac{r_k s_{k+1}}{\sigma_k\sigma_{k+1}(1-r_k^2)}\right]x_k + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{r_k s_k s_{k+1}}{\sigma_k\sigma_{k+1}(1-r_k^2)} - \frac{1}{2}\frac{(1-r_{k-1}^2r_k^2)s_k^2}{\sigma_k^2(1-r_{k-1}^2)(1-r_k^2)}\right]\right\},$$

$$\mathrm{mod}\, P((x_n) \in R^\infty).$$

Теорема 5 доведена.

Доведення теореми 6. Оскільки виконується умова (10), то $P_1 \sim \hat{P}_1$ в просторі $(l_2, B(l_2))$. Звідси випливає, що існує щільність Радона–Никодима зсунутої міри $\hat{P}_1$ відносно центрованої міри P_1. Далі доведення повторює доведення теореми 5. Теорема 6 доведена.

Висновки

Знайдені у статті необхідні і достатні умови абсолютної неперервності і сингулярності гауссівських марковських розподілів у термінах характеристик послідовностей у просторах дають можливість просто описати множину припустимих зсувів гауссівської марковської послідовності у просторах R^∞ і l_2 і знайти відповідну щільність Радона–Никодима гауссівської марковської послідовності відносно зсуву в гільбертовому просторі l_2. Отримані результати можуть застосовуватися в задачах статистики випадкових процесів, зв'язаних із гауссівськими марковськими процесами.

В.В. Булдыгин, М.К. Руновская

УСЛОВИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И СИНГУЛЯРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГАУССОВСКИХ МАРКОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Найдены условия эквивалентности и сингулярности распределений гауссовских марковских последовательностей в пространствах R^∞ и l_2, которые имеют достаточно простой вид. Это позволило описать множество допустимых сдвигов гауссовских марковских распределений в этих пространствах. Получена плотность Радона–Никодима гауссовской марковской меры относительно сдвига в пространстве l_2.

V.V. Buldygin, M.K. Runovska

THE EQUIVALENCE AND SINGULARITY CONDITIONS OF GAUSSIAN-MARKOV DISTRIBUTIONS

This paper deals with necessary and sufficient conditions for equivalence and singularity of Gaussian-Markov distributions in R^∞ and l_2-spaces. The obtained results are of a very simple kind. This allows describing the set of admissible shift of Gaussian-Markov distributions in R^∞ and l_2-spaces. In addition, the corresponding Radon-Nicodym density is determined.

1. *Богачев В.И.* Гауссовские меры. – М.: Наука, 1997. – 352 с.
2. *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. – М.: Мир, 1979. – 176 с.
3. *Скороход А.В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 232 с.
4. *Булдыгин В.В., Солнцев С.А.* Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин. – К.: Наук. думка, 1989. – 186 с.
5. *Lin'kov Yu.N., Ladan O.N.* Large deviations in hypothesis testing problems for the normal autoregressive processes // Theory of Stochastic Processes. – 1998. – **4(20)**, N 1-2. – P. 37–53.
6. *Іє О.Н.* Граничні теореми у задачах статистики процесів авторегресії. – Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Донецьк: Ін-т прикладної математики і механіки НАН України, 2004. – 20 с.
7. *Кабанов Ю.М., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* К вопросу об абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер // Мат. сборник. – 1977. – **104 (146)**, № 2(10). – С. 227–247.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1964. – Т. 2. – 573 с.
9. *Ширяев А.Н.* Вероятность-2. – 3-е изд. – М.: МЦНМО, 2004. – Кн.2. – 408 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
19 грудня 2007 року